Correction des exercices

2ème Bac Pro

2019 2020

1ère partie :

EX 1 : 1/ $f(x) = 3x^2 + 4x - 5$

donc $F(x) = x^3 + \frac{4}{2}x^2 - 5x$

$F(x) = x^3 + 2x^2 - 5x$

F est une primitive de f.

2/ $(\forall x \in \mathbb{R})$; $G'(x) = \left(\frac{3x-2}{x+1}\right)'$

$= \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{(x+1)^2} = \frac{(3)(1) - (-2)(1)}{(x+1)^2}$

$= \frac{3+2}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2} = g(x)$

on a : $G'(x) = g(x)$ donc G est une primitive de g.

EX 2 : $u_0 = 5$; $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} = \frac{7u_n + 4}{2u_n + 5}$

1-a/ Soit $n \in \mathbb{N}$ on a :

$u_{n+1} - 2 = \frac{7u_n + 4}{2u_n + 5} - 2 = \frac{7u_n + 4 - 2(2u_n+5)}{2u_n + 5}$

$= \frac{7u_n + 4 - 4u_n - 10}{2u_n + 5} = \frac{3u_n - 6}{2u_n + 5}$

$= \frac{3(u_n - 2)}{2u_n + 5}$.

1-b/ Montrons par récurrence que :

$(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 2$.

pour $n = 0$; $u_0 = 5 > 2$

Soit $n \geq 0$ et **supposons** $u_n > 2$

Mq $u_{n+1} > 2$

on a : $u_n > 2 \Rightarrow u_n - 2 > 0$

$\Rightarrow 3(u_n - 2) > 0$

et $2u_n + 5 > 2 \times 2 + 5 > 0$

donc : $\frac{3(u_n - 2)}{2u_n + 5} > 0$

c-à-d : $u_{n+1} - 2 = \frac{3(u_n - 2)}{2u_n + 5} > 0$

ou encore $u_{n+1} > 2$

d'après le principe de récurrence on déduit que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 2$

2/ $(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$

2-a/ Soit $(n \in \mathbb{N})$ on a :

$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 1} = \frac{\left(\frac{7u_n + 4}{2u_n + 5}\right) - 2}{\left(\frac{7u_n + 4}{2u_n + 5}\right) + 1}$

$= \frac{7u_n + 4 - 2(2u_n + 5)}{(2u_n + 5)} \Big/ \frac{7u_n + 4 + (2u_n + 5)}{(2u_n + 5)} = \frac{7u_n + 4 - 4u_n - 10}{7u_n + 4 + 2u_n + 5}$

$= \frac{3u_n - 6}{9u_n + 9} = \frac{3(u_n - 2)}{9(u_n + 1)} = \frac{3}{9} \times \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$

$= \frac{1}{3} v_n$ donc :

$(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n$

(c-à-d que $(v_n)_n$ est une suite géom de raison : $q = \frac{1}{3}$

on a : $v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 + 1} = \frac{5-2}{5+1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

2-b/ (v_n) est géométrique donc :

$(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n = q^n v_0$

$= \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \frac{1}{2}$

donc :

$(\forall n \in \mathbb{N})$; $v_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

2-c/ Soit $n \in \mathbb{N}$; on a :

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$$

$$\Leftrightarrow v_n \times (u_n + 1) = u_n - 2$$

$$\Leftrightarrow v_n u_n + v_n = u_n - 2$$

$$\Leftrightarrow v_n u_n - u_n = -2 - v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n \times (v_n - 1) = -2 - v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{-2 - v_n}{v_n - 1} = \frac{2 + v_n}{-v_n + 1}$$

donc : $u_n = \frac{2 + v_n}{1 - v_n}$ et $v_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

on trouve : $u_n = \frac{2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

c-à-d :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = \frac{4 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}{2 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

on a : $0 < \frac{1}{3} < 1$ donc : $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

donc : $\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{4+0}{2-0} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$

Ex 3

I $g(x) = \frac{x^2 - 1 - 2\ln(x)}{x^2}$

$x \in]0, +\infty[$

I-1/ g est dérivable sur $]0, +\infty[$

et $(\forall x > 0)$: $g'(x) = \left(\frac{x^2 - 1 - 2\ln(x)}{x^2}\right)'$

$$= \frac{\left(2x - \frac{2}{x}\right) \times x^2 - 2x\left(x^2 - 1 - 2\ln(x)\right)}{x^4}$$

$$= \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 + 2x + 4x\ln(x)}{x^4}$$

$$= \frac{4x\ln(x)}{x^4} = \frac{4\ln(x)}{x^3}$$

I-2/ $\forall x > 0$, $x^3 > 0$

$\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$

$\ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

donc :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
g	‖ ↘		$g(1)$	↗	

d'après le tableau :

$\forall x > 0$, $g(x) \geq g(1) = \frac{1^2 - 1 - 2\ln(1)}{1^2}$

$$\boxed{\forall x > 0 \quad g(x) \geq 0}$$

II $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3 + 2\ln(x)}{x}$; $x \in]0, +\infty[$

II-1/ $\lim_{x \to +\infty} f(x)$; on a :

$$f(x) = \frac{x^2}{x} - \frac{4x}{x} + \frac{3}{x} + 2\frac{\ln x}{x} = x - 4 + \frac{3}{x} + 2\frac{\ln x}{x}$$

on sait que : $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

donc : $\lim_{x \to +\infty} \left(x - 4 + \frac{3}{x} + 2\frac{\ln(x)}{x}\right)$

$= " +\infty - 4 + 0 + 0 " = \boxed{+\infty}$

donc $\lim_{+\infty} f = +\infty$

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = ?$

on sait que : $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

donc : $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \frac{" 0^2 - 4\times 0 + 3 + (-\infty) "}{0^+}$

$= \frac{" -\infty "}{0^+} = " -\infty \times \frac{1}{0^+} " = \boxed{-\infty}$

II-2/ on a : $f(x) = x - 4 + \frac{3}{x} + 2\frac{\ln(x)}{x}$

donc : $\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - (x-4)\right] = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3}{x} + 2\frac{\ln(x)}{x}\right)$

$= 0 + 0 = \boxed{0}$

Interprétation : la droite (D) est asymptote (à $(\mathcal{C}_f)$)

II-3/ $f'(x) = \left(\frac{x^2-4x+3+2\ln(x)}{x}\right)'$

$= \frac{\left(2x-4+\frac{2}{x}\right)x - (x^2-4x+3+2\ln(x))}{x^2}$

$= \frac{2x^2-4x+2-x^2+4x-3-2\ln(x)}{x^2}$

$= \frac{x^2-1-2\ln(x)}{x^2} = g(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$

donc $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe : tableau de variation de f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
f	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

II-4°/ on a : $f'(x) = g(x)$

donc : $\forall x > 0$, $f''(x) = g'(x) = \frac{4\ln(x)}{x^3}$

et $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4\ln(x) = 0$

$\Leftrightarrow \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

le point A d'abscisse $x_A = 1$ est un point d'inflexion, on a : $f(1) = 0$

donc : $A(1;0)$.

Rq on peut aussi écrire :

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$(\mathcal{C}_f)$	‖ ∩ concave		point d'inflexion	∪ convexe	

II-5°/ $(\forall x > 0)$: $f(x) - y = [f(x) - (x-4)]$

$= \frac{3}{x} + \frac{2\ln(x)}{x} = \frac{3+2\ln(x)}{x}$

$3 + 2\ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow e^{\ln x} > e^{-3/2}$

$\Leftrightarrow x > e^{-3/2}$

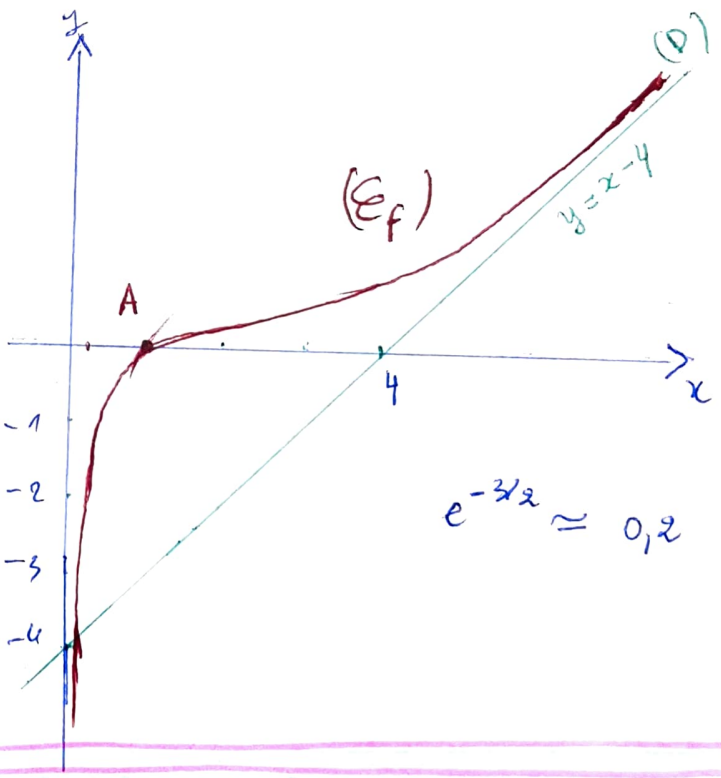
Donc : $(\mathcal{C}_f)$ est au dessus de y sur l'intervalle : $]e^{-3/2}; +\infty[$

$(\mathcal{C}_f)$ est au dessous de y sur $]0; e^{-3/2}[$

II-6/ on commence toujours par dessiner les asymptotes puis les points remarquables.

on a : $y = x-4$ asymptote oblique

$A(1,0)$ point d'inflexion.



$e^{-3/2} \simeq 0,2$

2ème partie :

EX 1 $z^2 + 2\sqrt{3}z + 12 = 0$

$\Delta = (+2\sqrt{3})^2 - 4 \times 12$

$= 4 \times 3 - 48 = -36 = i^2 \times 6^2$

$= (i6)^2$

deux solutions complexes :

$z_1 = \dfrac{-2\sqrt{3}+i6}{2} = -\sqrt{3}+i3$

$z_2 = \dfrac{-2\sqrt{3}-i6}{2} = -\sqrt{3}-i3$

donc

$S = \{-\sqrt{3}+i3 \; ; \; -\sqrt{3}-i3\}$

2°/ $\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{2\sqrt{3}-(-\sqrt{3}+3i)}{-\sqrt{3}-3i-(-\sqrt{3}+3i)}$

$= \dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{3}-3i}{-\sqrt{3}-3i+\sqrt{3}-3i}$

$= \dfrac{3\sqrt{3}-3i}{-6i} = \dfrac{i(3\sqrt{3}-3i)}{i\times(-6i)}$

$= \dfrac{i3\sqrt{3}-3i^2}{-6i^2} = \dfrac{i3\sqrt{3}+3}{6}$

$= \dfrac{i\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2} = \boxed{\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

3°/ on a : $\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{c-a}{b-a} = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

donc : $\begin{cases} \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3} \; [2\pi] \\ \left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = 1 \end{cases}$

c-à-d : $\begin{cases} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \dfrac{\pi}{3} \; [2\pi] \\ AB = AC \end{cases}$

donc ABC est équilatéral

2ème méthode : on compare AB, AC et BC on a :

$AB = |z_B - z_A| = |b-c| = \dots$

$AC = |c-a| = \dots$

$BC = |c-b| = \dots$

et on trouve que :

$AB = AC = BC$.

Ex 2 ; 1/ $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$\dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{e^{-x}\times e^x}{e^{-x}(1+e^x)} = \dfrac{e^{-x+x}}{e^{-x}+e^{-x+x}} = \dfrac{e^0}{e^{-x}+e^0}$

$= \dfrac{1}{e^{-x}+1} = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$

2°/ $\dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2e^x = 1+e^x$

$\Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln(1) = 0$

donc $S = \{0\}$

3°/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{1+e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+e^{-x}}$

$= \dfrac{1}{1+0} = \boxed{1}$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$)

4°/ $A = e^{\ln 2} + e^{\ln 3} = 2+3 = \boxed{5}$

$B = \ln(e^{-3}) + e^{-\ln(3)}$

$= -3 + e^{\ln(\frac{1}{3})} = -3+\dfrac{1}{3} = \dfrac{-9+1}{3} = \boxed{\dfrac{-8}{3}}$

5°/ soit $x > 1$ on a :

$\ln(x-1) - \ln(x) = \ln(x-1) + \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$= \ln\left((x-1)\times\dfrac{1}{x}\right) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$

donc : $e^{\ln(x-1)-\ln(x)} = e^{\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)}$

$= \dfrac{x-1}{x} = \dfrac{x}{x} - \dfrac{1}{x} = \boxed{1-\dfrac{1}{x}}$

// Fin //